Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®

Clave: TEIEC011

Resumen

Una de las conclusiones más generalizadas que han sido producto de varias investigaciones en Matemática Educativa es la necesidad de desarrollar un tipo de pensamiento que ayude a interpretar, analizar y resolver problemas que involucren la variación, al que denominaremos pensamiento y lenguaje variacional. Para su desarrollo se han diseñado algunos archivos en CABRI II PLUS® de tal forma que acompañados por actividades de aprendizaje que privilegien las diferentes representaciones semióticas de los objetos del cálculo, logren que los estudiantes transiten por los diferentes niveles del pensamiento variacional. Se observó que existe resistencia por parte de los estudiantes al uso de recursos tecnológicos, sin embargo al paso del tiempo aceptan la mediación y se logra observar la adquisición de significados asociados a los conceptos centrales del cálculo.

Pensamiento y Lenguaje Variacional, Cálculo, Representaciones Semióticas, Cabri II Plus®

Introducción

¿ Qué es el Cálculo? Esta pregunta fue planteada a un grupo de profesores que imparten el curso AP Calculus en algunas prestigiadas instituciones de Estados Unidos y aunque se pide una respuesta que no ocupe más de dos renglones la de más ocurrencia está de alguna forma relacionado con la variación o el cambio. Esta misma pregunta y con la misma extensión la planteamos a docentes que imparten o han impartido cursos de cálculo en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez a estudiantes de Ingeniería y las respuestas que tienen relación con la variación y el cambio tienen una frecuencia del 50 %; sin embargo, se observa que en la práctica docente de estos maestros, relacionada con el cálculo, se privilegia más el desarrollo de actividades algorítmicas con el propósito de obtener derivadas y primitivas mediante el uso de formularios.
Al parecer las autoridades educativas asumen que el aprendizaje en un curso de cálculo, no se afecta significativamente, al suponer que basta con tener un listado de temas relativos al objeto de conocimiento para que automáticamente los docentes perciban de la misma forma los conceptos del cálculo y actúen de forma similar en la instrucción.

El acceso a los objetos matemáticos relacionados con el cálculo no es directo y es necesario acudir a representaciones de éstos. Lo que sugerimos la mayoría de los que investigamos esta problemática acudir a problemas en los que se privilegie el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional como la forma idónea de arribar a los conceptos del cálculo de una forma más efectiva, significativa y con sentido para los estudiantes.

El desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional a diferencia del algebraico que es el que generalmente juega un papel preponderante en la escuela, requiere de la formación de conceptos apropiados, además del desarrollo de algunas habilidades y de la formación de actitudes y hasta de una ruptura con la forma de pensamiento algebraico para que los estudiantes puedan ser exitosos en la resolución de problemas que involucren la variación.

En el contexto de esta forma de pensamiento, las gráficas, tablas, expresiones analíticas, formas figurales ó pictóricas, el lenguaje natural y otras representaciones semióticas de los objetos matemáticos, se ven con una perspectiva diferente, en donde el cambio juega un papel fundamental y así la representación lograda no queda como el objetivo final en el estudio, ya que en ésta se analizan los cambios según el tipo de representación. Por ejemplo, en las gráficas puede ser relevante:

- la región del plano en donde se encuentren,
- la dirección asociada a la forma creciente o decreciente,
- la concavidad relacionada con el aumento de la rapidez de cambio, si es cóncava hacia arriba; y con la disminución si lo es hacia abajo
- la concavidad y los cambios de la rapidez de la rapidez del cambio,
- los puntos estacionarios,
- la inclinación de las tangentes, los cambios de posición,
- la aceleración y desaceleración, etc.

y en el caso de los datos numéricos:

- la variación y el cambio tienen sentido al observar los valores numéricos de las diferencias en las cuales se deben analizar los cambios abruptos, leves o nulos de la función provocados por los de la variable independiente,
- los valores y signos de los cocientes de las diferencias, etc.

en lo que respecta a las expresiones analíticas debe tener sentido:

- el cálculo de incrementos,
- límites,
- derivadas y sus respectivos signos, etc.

todo esto como una consecuencia del desarrollo del pensamiento variacional.

Es de relevancia considerar que así como en algún momento se propuso por el matrimonio Van Hiele la existencia de diferentes niveles del pensamiento geométrico (Burger, 1986), en el caso del pensamiento variacional existen propuestas en el sentido de ubicar a éste en diferentes niveles de desarrollo, según Ramiro Ávila en su tesis doctoral (Ávila, 1999).

En la propuesta de Ávila se consideran diferentes niveles de desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional, que inician en la etapa de reconocer en un fenómeno modelado matemáticamente la existencia de la variación de forma global sin ubicar con precisión los elementos que cambian. Al evolucionar este tipo de razonamiento pasa por distinguir los elementos en la variación y posteriormente como se da ésta y con que intensidad, para posteriormente ser capaces de relacionarlos con tablas y gráficas de tal forma que la dirección de la variación la relacionan con el signo de la derivada y la forma de la gráfica de la función, así mismo la concavidad se liga a la rapidez de la variación y al signo de la segunda derivada ya que si la gráfica es cóncava hacia arriba corresponde a una función creciente que va aumentando su ritmo de crecimiento y si los es hacia abajo corresponde a una creciente que va disminuyendo, y finalmente este pensamiento en su etapa más avanzada logra relacionarla con diferentes modelos y es capaz de hacer transferencias entre éstos.

Al mostrar o desarrollar los archivos elaborados con el CABRI II PLUS® es recomendable observar y describir lo que éstos muestran, por ejemplo los elementos que varían y los que permanecen fijos, los valores que pueden tomar las magnitudes y la forma en la que una magnitud varía dependiendo de otra, también es importante observar y plantear preguntas relativas a los valores que puede tomar la variable independiente sin que el problema de contexto pierda sentido, en otras palabras el dominio contextual, observar si la función tiene un máximo o un mínimo absoluto o local, si existe más de uno, o si existe un mismo valor de la variable dependiente que corresponda a valores diferentes de la independiente y seguramente en el proceso ocurrirán situaciones que se deben aprovechar según la circunstancia de éstas ya que las actividades planeadas suelen ser un tanto aleatorias en el sentido de que pueden tomar otro rumbo diferente al esperado; sin embargo éstas pueden ser aprovechadas dada la condición de los estudiantes que generalmente no están acostumbrados a trabajar en este tipo de ambientes y suelen exigir la fórmula que les resuelva el problema de forma inmediata, aunque carezca de significado para ellos, por supuesto que en este tipo de situaciones, la habilidad del maestro es muy importante, para ser exitoso en la producción de aprendizaje en sus estudiantes.

Consideraciones teóricas

Las actividades desarrolladas con el CABRI II PLUS® privilegian algunos registros de representación semiótica según la óptica de Duval, 1998 y promueven el tratamiento y la conversión tal como lo manifiesta el autor de esta teoría. Sostiene que el acceso al conocimiento matemático no es directo y es necesario usar representantes de los objetos para llegar al representado, sin dejar de lado que es necesaria la aprehensión conceptual de los mismos y no quedarse con el representado como suele ocurrir con mucha frecuencia.

Duval sostiene que es necesario tener al menos dos registros de representación semiótica de un objeto matemático para tener acceso a él, lo que se traduce a más probabilidades de éxito en el aprendizaje del mismo ó lograr lo que él denomina la aprehensión conceptual.

Se debe reconocer que este software tiene como debilidad la representación analítica de los objetos matemáticos; sin embargo el arrastre que se hace de los objetos geométricos y numéricos permitidos por este paquete logra que el dinamismo sea claro, evidente y fácil

de manipular, con lo que la navegación entre los diferentes registros o dentro de ellos mismos es además atractiva para los estudiantes.
Esta forma de abordar el cálculo acude con mucha insistencia a cuantificar la variación en intervalos hasta llegar hacerlo con la variación instantánea o puntual iniciando con problemas contextuales en la realidad del estudiante, lo anterior obedece a que cuando se reflexiona sobre lo que es el cálculo vemos que en los programas oficiales no existe un señalamiento explícito de la visión o filosofía del mismo, lo cual hace suponer que los docentes tienen pequeñas diferencias que no afectan la sustancia de un curso (Jiménez, 2000).

Metodología.

La investigación se llevó a cabo en un grupo de 25 alumnos de nuevo ingreso a los que impartí el curso de cálculo diferencial en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, se pusieron en práctica algunas actividades didácticas que mediante instrucciones y preguntas pretenden que los estudiantes arriben a los objetos del cálculo, transitando por las fases de acción, formulación y validación como lo propone la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002), que acompañaron archivos de CABRI II PLUS® previamente seleccionados, en los que la variación juega un papel relevante para arribar a una idea significativa de función, límite y derivada.
Los estudiantes participaron en grupos de trabajo a los que se les proyectaban los archivos en una pantalla para que ellos contestaran las preguntas formuladas en las actividades y que posteriormente eran validadas en todo el grupo
Las actividades y los archivos fueron atractivos ya que finalmente se logró la participación activa de los estudiantes que en un principio se resistían a estas formas de enseñanza.
En experiencias pasadas hemos elaborado algunos archivos en CABRI II PLUS® a los que denominamos de impacto visual; sin embargo la tendencia en el uso de este software va en la dirección de lograr reflexiones más profundas aunque los problemas y archivos sean sencillos, incluso se pueden hacer interesantes algunos problemas considerados como rutinarios que luego son subestimados por muchos docentes, por ejemplo el caso de investigar el comportamiento de la variación del área de un rectángulo con semiperímetro fijo y relacionarlo con la gráfica y una tabla de valores de ésta.
Los archivos pueden ser construcciones rígidas con archivos previamente elaborados, semirrígidas, archivos ya construídos a los que el estudiante puede agregarle o cambiarle algunas cosas a la construcción o blandas, en éstos la construcción se va logrando en el avance de la instrucción (Healy, 2002). En el caso de que no se disponga de suficiente equipo las actividades se proyectan por el instructor y las preguntas e instrucciones se hacen a equipos o se organiza según las características del grupo.
Es pertinente comentar que el proceso de instrucción es aleatorio en el sentido de que no siempre ocurre lo esperado por el instructor, el cual tendrá que modificar las variables didácticas para dirigir la instrucción a lo más adecuado al propósito.

Las Actividades

El CABRI II PLUS® es un software de geometría dinámica con el cual se median las representaciones semióticas y si los archivos son acompañados de una actividad didáctica significativa, es posible lograr que los estudiantes naveguen de manera congruente entre las diferentes representaciones logradas del objeto con muchas probabilidades de ser exitosos en la solución de problemas del cálculo.
Al mostrar o desarrollar los archivos es recomendable observar y describir lo que éstos muestran, por ejemplo, los elementos que varían y los que permanecen fijos, los valores que pueden tomar las magnitudes y la forma en la que una magnitud varía dependiendo de otra. También es importante observar y plantear preguntas relativas a los valores que puede tomar la variable independiente, sin que el problema de contexto pierda sentido, en otras palabras, el dominio contextual, observar si la función tiene un máximo o un mínimo, si existe más de uno o si existe más de un valor de la variable dependiente que corresponda a un único de la independiente. Seguramente en el proceso ocurrirán situaciones que se deberán aprovechar según la circunstancia de éstas, ya que las actividades planeadas suelen ofrecer resultados inesperados que pueden tomar otro rumbo diferente al planeado, pero que pueden ser aprovechadas dada la condición de los estudiantes que generalmente no están acostumbrados a trabajar en este tipo de ambientes y luego suelen exigir la fórmula que les resuelva el problema de forma inmediata aunque carezca de significado para ellos.

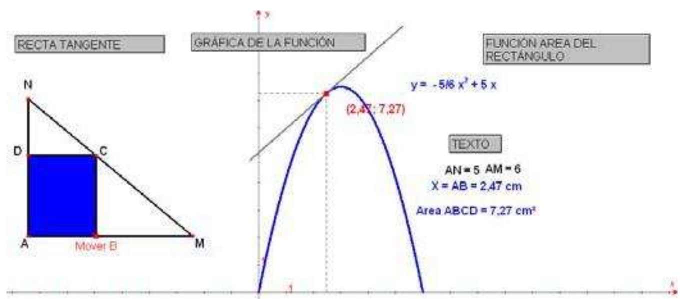

Figura 1

En la figura 1 se muestra un archivo en el que la visualización de la variación es muy clara: sin embargo las actividades con las que se debe acompañar deben ser cuidadosamente diseñadas de tal forma que las instrucciones y preguntas provoquen reflexiones que produzcan tratamientos y conversiones entre las diferentes representaciones del objeto de conocimiento. Al arrastrar el punto B de la Figura 1 se observan variaciones en los diferentes objetos geométricos tales como el área del rectángulo inscrito en el triángulo, los triángulos rectángulos situados arriba y a la derecha del rectángulo inscrito, la altura del rectángulo y la diagonal del mismo.
El archivo ha sido utilizado para introducir una idea significativa de función, en donde se privilegian algunos conceptos inherentes a ésta, tales como variable independiente lo cual se logra sin mucha dificultad al arrastrar arbitrariamente el punto B y ver que el área del rectángulo varía dependiendo de la longitud de la base (x=AB) de éste.
, asimismo se puede determinar el dominio contextual ($0 \leq x \leq AM$) que tiene que ver con los valores que toma la longitud de la base del rectángulo sin que el problema

contextual pierda sentido, para luego conectarlo con el domino general de la función que en este caso son todos los reales.

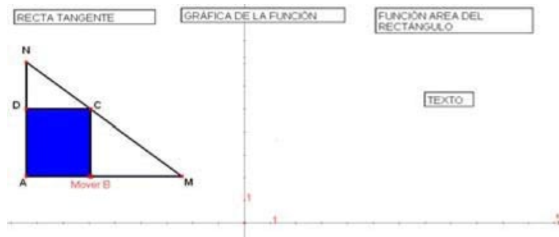

Figura 2

En la Figura 2 se muestran desplegados algunos objetos que en el lado derecho no se observan ya que en el CABRI II PLUS® se cuenta con la opción denominada “botón ocultar mostrar” el cual permite crear botones para ocular y mostrar dibujos o números haciendo click en éstos, los cuales aparecen en la parte superior de la Figura 2, estos se muestran o se ocultan dependiendo de la actividad didáctica ó del rumbo que tome la instrucción en el aula.
El archivo es muy útil para trabajar con el tema de máximos y mínimos y si se diseñan actividades adecuadas es magnífico para hacer una introducción a la derivada y de paso por una idea muy significativa de límite. Como se puede observar, en el archivo aparecen objetos geométricos, numéricos y simbólicos, que cambian al arrastrar el punto B y con esto se puede lograr que los estudiantes naveguen de manera congruente entre las diferentes representaciones semióticas de los objetos matemáticos en cuestión.

Para relacionar problemas de movimiento con la derivada, de tal forma que los estudiantes inicien cuantificando la variación en intervalos de tiempo, que luego los harán más pequeños, hasta que finalmente logren cuantificar la variación instantánea o puntual. El Lic Luis E. Macías colaboró con la elaboración del archivo mostrado en la Figura 3, en el cuál se muestra un objeto en caída libre (una bola de billar) y en donde la variación ocurre al arrastrar el punto “mover” en el segmento mostrado en la parte superior de la figura, asimismo si se hace doble click en el intervalo del tiempo mostrado en la parte superior derecha se logran variaciones de éste disminuyendo ó aumentando los valores de Δt.

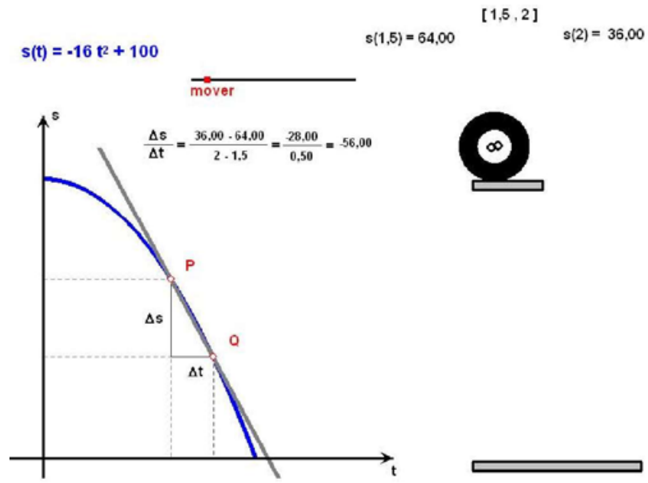

Figura 3

A manera de conclusión.

En la experimentación con estos archivos de geometría dinámica tanto para la instrucción como para la investigación en principio se observan algunas resistencias de los estudiantes de cálculo del primer semestre del nivel superior, debido a las inercias y a la concepción de la matemática en situación escolar que tienen los estudiantes que ya han recorrido un largo tramo del sistema educativo dentro de una práctica docente tradicionalista, se detectan casos en los que se exige que se les proporcione la fórmula que "resuelva" el problema, aunque con esto pierdan la oportunidad de hacer matemáticas.

Sin embargo lo atractivo de los archivos es que mediante la visualización logran captar la atención de la mayoría de los aprendices, permiten que la exploración sea un camino hacia la conjetura y posteriormente a la conclusión conduciendo finalmente a la demostración empírica que aunque no sea formal es una vía de acceso al conocimiento matemático que posteriormente podrá ser formalizado.
Es conveniente reiterar sobre la necesidad de acompañar los archivos de CABRI II PLUS® con actividades didácticas relevantes y por supuesto que se requiere de algunas habilidades de los docentes para la efectividad en el aprendizaje en la situación de instrucción, ya que en algunos casos el docente deja libre al estudiante, en otros es él quien desarrolla casi la totalidad de las acciones y lo que recomendamos es que actúe como conductor del proceso de tal forma que la actividad se concentre en el estudiante pero controlada por el maestro, ya que con frecuencia ocurren cosas inesperadas y diferentes a lo planeado y es en estos casos en los que el docente debe mostrar las habilidades necesarias para buscar el rumbo más adecuado al propósito en de la instrucción.

Referencias

Ávila, R. (1999). Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Morelos.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situacions in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

Duval, R. (1998). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. Grupo Editorial Iberoamérica.

Healy, L and Hoyles, C. (2002). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6(3), 235 – 256.Jiménez, J. (2000).

Jiménez, J. (2000). La visión del cálculo. Antología interna no publicada de UNISON.